Practica 1

MA2115 Matemáticas IV (semi-presencial)

Boris Iskra

enero – marzo 2010

1. Sucesiones de números.
2. Sucesiones en recurrencia.

Ejemplo 1:

$$a_n = \quad \sqrt{n(n+2)} - n \quad \cdot \frac{\sqrt{n(n+2)} + n}{\sqrt{n(n+2)} + n}$$

$$= \frac{\cancel{n^2} + 2n - \cancel{n^2}}{\sqrt{n(n+2)} + n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \frac{2n}{\left(\sqrt{n(n+2)} + n\right)}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\frac{n(n+2)}{n^2}} + 1} = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1}$$

luego :

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1} = \frac{2}{\sqrt{1} + 1} = 1 \qquad \square$$

Ejemplo 1′:

Suponga que $k > 0$.

$$
\begin{aligned}
a_n &= \sqrt{n(k^2 n + 2)} - kn \cdot \frac{\sqrt{n(k^2 n+2)} + kn}{\sqrt{n(k^2 n+2)} + kn} \\
&= \frac{\cancel{k^2 n^2} + 2n - \cancel{k^2 n^2}}{\sqrt{n(k^2 n+2)} + kn} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \frac{2n}{\left(\sqrt{n(k^2 n+2)} + kn\right)} \\
&= \frac{2}{\sqrt{\frac{n(k^2 n+2)}{n^2}} + k} = \frac{2}{\sqrt{k^2 + \frac{2}{n}} + k}
\end{aligned}
$$

luego :

$$
\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{k^2 + \frac{2}{n}} + k} = \frac{2}{\sqrt{k^2} + k} = \frac{1}{k} \quad \square
$$

Ejemplo 2:

$$a_n = \frac{\ln(2+e^n)}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(2+e^n)}{n} \overset{L'Hopital}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{e^n}{2+e^n}}{1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{2+e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{2+e^n}{e^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{2}{e^n}+1} = 1 \quad \square$$

Ejemplo 3:

$$a_n = \frac{n^2}{2n+1} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{n}{2n+1} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{\color{red}{\pi} n}{2n+1} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\color{red}{\pi}}{n}}$$

luego :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \cancelto{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi n}{2n+1}} \cancelto{1}{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}}} = \frac{\pi}{2} \qquad \square$$

1. Sucesiones de números.
2. Sucesiones en recurrencia.

Ejemplo 1: Hallando el límite

$$a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}, \quad a_1 = 3, \quad n \geq 2.$$

Supongamos que el límite existe, sea

$$x = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n-1}.$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{2 + a_{n-1}} = \sqrt{2 + \lim_{n\to\infty} a_{n-1}} \\
x &= \sqrt{2 + x} \\
x^2 &= 2 + x \\
x &= 2 \text{ o } -1. \\
x &= 2. \quad \square
\end{aligned}$$

Ejemplo 1: Probando existencia (La sucesión es acotada)

$$a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}, \quad a_1 = 3, \quad n \geq 2.$$

Probemos por inducción que $a_n > 2$ para todo $n \geq 1$.
Claramente es cierto para $n = 1$.
Supongamos cierto para $n - 1$, es decir, $a_{n-1} > 2$, entonces,

$$a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}} > \sqrt{2 + 2} = 2 \quad \square$$

Ejemplo 1: Probando existencia (La sucesión es monótona)

$$a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}, \quad a_1 = 3, \quad n \geq 2.$$

Para finalizar, hay que probar que la sucesión en monótona (decreciente en este caso).
Claramente $a_2 = \sqrt{2 + a_1} = \sqrt{5} < 3 = a_1$.
Supongamos que $a_n < a_{n-1}$,
entonces,

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2 + a_{n-1}} = a_n \quad \square$$

Ejemplo 2: Hallando el límite

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n - \frac{2}{a_n}\right), \quad a_1 = 2, \quad n \geq 1.$$

Supongamos que el límite existe, sea $x = \lim_{n\to\infty} a_n$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_n - \frac{2}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_n - \frac{2}{\lim_{n\to\infty} a_n}\right) \\
x &= \frac{1}{2}\left(x - \frac{2}{x}\right) \\
2x^2 &= x^2 - 2 \\
x^2 &= -2 \text{ ????}
\end{aligned}$$

Observe que TODOS los a_n son reales. Por lo tanto, el límite NO existe.

Ejemplo 2: Algunos términos

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n - \frac{2}{a_n}\right), \quad a_1 = 2, \quad n \geq 1.$$

a_1	=	2,0	a_{11}	=	-0,53537	a_{1020}	=	1,04868
a_2	=	0,5	a_{12}	=	1,60016	a_{1021}	=	-0,42922
a_3	=	-1,75	a_{13}	=	0,17514	a_{1022}	=	2,11516
a_4	=	-0,30357	a_{14}	=	-5,62203	a_{1023}	=	0,58480
a_5	=	3,14233	a_{15}	=	-2,63314	a_{1024}	=	-1,41756
a_6	=	1,25293	a_{16}	=	-0,93679	a_{1025}	=	-0,00335
a_7	=	-0,17166	a_{17}	=	0,59906	a_{1026}	=	298,49949
a_8	=	5,73953	a_{18}	=	-1,36972	a_{1027}	=	149,24639
a_9	=	2,69553	a_{19}	=	0,04520	a_{1028}	=	74,61649
a_{10}	=	0,97678	a_{20}	=	-22,09664	a_{1029}	=	37,29484

Ejemplo 5′: Hallando el límite

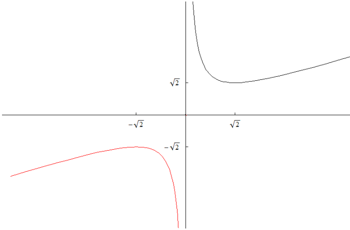
$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right), \quad a_1 = -5, \quad n \geq 1.$$

Supongamos que el límite existe, sea $x = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_n + \frac{2}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}\right) \\
x &= \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) \\
2x^2 &= x^2 + 2 \\
x^2 &= 2 \\
\lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= -\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Ejemplo 2′: Probando existencia (La sucesión es acotada)

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right), \quad a_1 = -5, \quad n \geq 1.$$



Veamos que $a_n < -\sqrt{2}$ para todo $n \geq 1$.
Consideremos la función $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$.
Como todos los valores de a_n son negativos, consideramos la parte en rojo.
Es fácil ver que el máximo se obiene para $x = -\sqrt{2}$ y es igual a $-\sqrt{2}$
Por lo tanto, $a_n < -\sqrt{2}$.
Ya que $a_n = f(a_{n-1}) < -\sqrt{2}$.

Ejemplo 2′: Probando existencia (La sucesión es monótona)

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right), \quad a_1 = -5, \quad n \geq 1.$$

Para finalizar, hay que probar que la sucesión en monótona (creciente en este caso).
Ya vimos que, $a_n < -\sqrt{2}$.
Luego, $a_n^2 > 2$ y $a_n < \dfrac{2}{a_n}$. ¿Porque?
Por lo tanto, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{2}{a_n}\right) > \dfrac{1}{2}\left(a_n + a_n\right) = a_n \quad \square$